

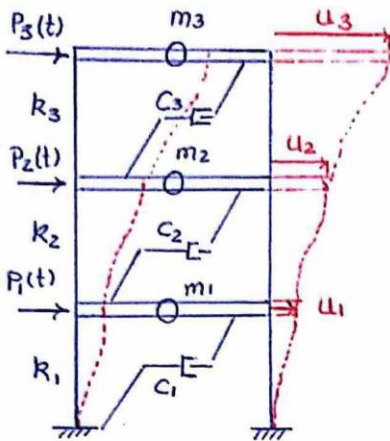


ویژه کلاس های مجازی

دینامیک سازه ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

(۱) استخراج ماتریس های جرم، سختی و میرایی با نوشتن معادلات تعادل دینامیکی طبق قانون دوم نیوتن



m_j : جرم در تراز طبقه j ام متناظر با درجه آزادی j ام

c_j : میرایی در تراز طبقه j ام متناظر با درجه آزادی j ام

k_j : سختی در تراز طبقه j ام متناظر با درجه آزادی j ام

P_j : نیروی تراز طبقه j ام متناظر با درجه آزادی j ام

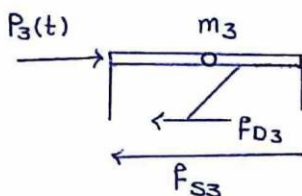
در صورتی که سختی تیرها در بخش بی نهایت فن شود

یعنی تیرها صلب باشند، آنگاه مجموع سختی ستون ها

سختی طبقه j ام را تشکیل می دهند یعنی

$$k_j = \sum_{\text{columns}} \frac{12EI}{h^3}$$

$$\sum F_x = m_3 \ddot{u}_3$$



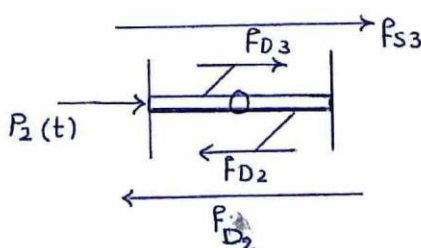
$$P_3(t) - f_{S3} - f_{D3} = m \ddot{u}_3$$

$$f_{S3} = k_3 (u_3 - u_2)$$

$$f_{D3} = c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2)$$

$$\Rightarrow m_3 \ddot{u}_3 + f_{D3} + f_{S3} = P_3(t)$$

$$m_3 \ddot{u}_3 + c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + k_3 (u_3 - u_2) = P_3(t) \quad \text{رابطه (۱)}$$



$$\sum F_x = m_2 \ddot{u}_2$$

$$P_2(t) + f_{D3} - f_{D2} + f_{S3} - f_{S2} = m_2 \ddot{u}_2$$

$$\Rightarrow m_2 \ddot{u}_2 + f_{D2} - f_{D3} + f_{S2} - f_{S3} = P_2(t)$$

$$\Rightarrow m_2 \ddot{u}_2 + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + k_2 (u_2 - u_1) - k_3 (u_3 - u_2) = P_2(t)$$

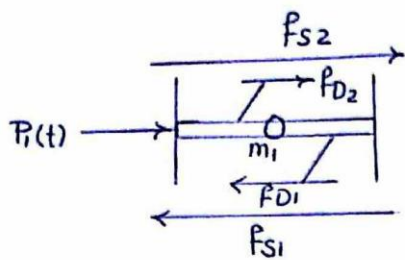
رابطه (۲)



ویژه کلاس های مجازی

دینامیک سازه ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$\sum F_x = m_1 \ddot{u}_1$$


$$P_1(t) - f_{D1} + f_{D2} - f_{s1} + f_{s2} = m_1 \ddot{u}_1$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{u}_1 + f_{D1} - f_{D2} + f_{s1} - f_{s2} = P_1(t)$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) = P_1(t)$$

رابطه (3)

اکنون روابط (1) تا (3) را در فرم ماتریسی می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

ماتریس جرم برای ارتداد ماتریس میرایی بردار میرایی بردار نیرو ماتریس سختی بردار جابجایی

$$[m] \{\ddot{u}\} + [c] \{\dot{u}\} + [k] \{u\} = \{P(t)\}$$

معادلات ماتریسی

برای معادل دینامیک

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}; \quad \{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}; \quad \{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$



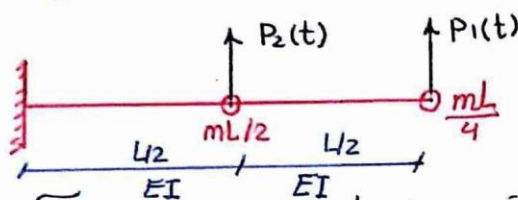
ویژه کلاس های مجازی

دینامیک سازه ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

(۲) استخراج ماتریس های جرم، سختی و میرایی به روش ضرایب تاثیر

مطابق شکل یک سازه به طول L دارای دو هم مت مرکز به مقدار $\frac{mL}{2}$ در میانه و $\frac{mL}{4}$ در انتهای آزاد است. از جرم خود تیر صرف نظر می شود و سختی تیر با مقدار EI در طول تیر ثابت است. بهر حال $P_1(t)$ و $P_2(t)$ به تیر وارد می شوند. از تغییر شکل هلی محوری و برشی صرف نظر می گردد. با استفاده از ضرایب تاثیر جرم و سختی ماتریس جرم و سختی سازه را مناسب بارهای آزادی نشان داده شده به دست آید.



استراتیژی حل مسئله.

در روش ضرایب تاثیر سختی درایه k_{ij} از ماتریس سختی طبق تعریف زیر به دست می آید:

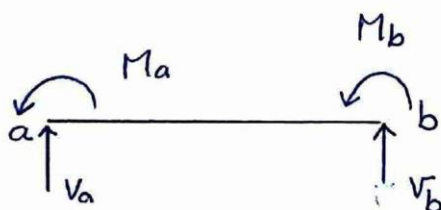
k_{ij} : برابر است با نیروی لازم برای درجه آزادی j ام وقتی که تغییر مکان واحد در درجه i ام اعمال می شود و تغییر مکان در سایر درجات آزادی برابر با صفر است.

که طبق قانون بی-مکول ماتریس سختی قطری است، یعنی $k_{ij} = k_{ji}$ بنابراین می توان گفت:

k_{ij} : برابر است با نیروی لازم در درجه آزادی j ام، حتی که تغییر مکان واحد در درجه i ام اعمال شود تغییر مکان در سایر درجات آزادی برابر با صفر است.

که برای محاسبه ضرایب تاثیر سختی (k_{ij}) می توان از معادلات گسسته تغییر مکان استفاده نمود. معادلات پایه این روش در پیوسته فصل اول کتاب صفحات ۳۳ و ۳۴ آورده شده است.

که در این روش گره های خمگی در انتهای عضو بار ساعنگرد مثبت فرض می شوند



که در این روش برش چپ سمت بالا مثبت فرض می شوند



(۳) معادلات پایه روش شیب-تغییرمکان:

APPENDIX 1: STIFFNESS COEFFICIENTS FOR A FLEXURAL ELEMENT

From the slope deflection equations, we can write the stiffness coefficients for a linearly elastic, prismatic (uniform) frame element. These are presented in Fig. A1.1 for an element of length L , second moment of area I , and elastic modulus E . The stiffness

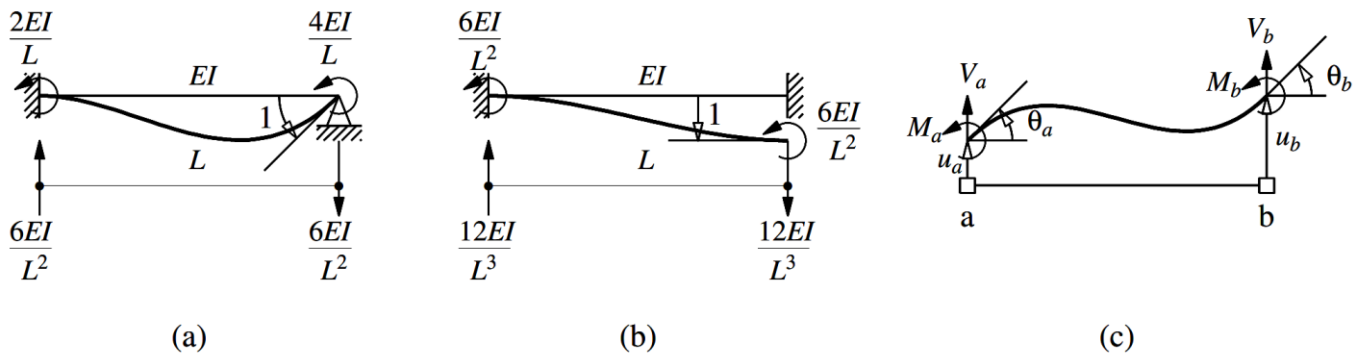


Figure A1.1

coefficients for joint rotation are shown in part (a) and those for joint translation in part (b) of the figure.

Now consider the element shown in Fig. A1.1c with its two nodes identified as a and b that is assumed to be axially inextensible. Its four degrees of freedom are the nodal translations u_a and u_b and nodal rotations θ_a and θ_b . The bending moments at the two nodes are related to the four DOFs as follows:

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b \quad (A1.1)$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}\theta_a + \frac{4EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b \quad (A1.2)$$

The shearing forces at the two nodes are related to the four DOFs as follows:

$$V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b \quad (A1.3)$$

$$V_b = -\frac{12EI}{L^3}u_a + \frac{12EI}{L^3}u_b - \frac{6EI}{L^2}\theta_a - \frac{6EI}{L^2}\theta_b \quad (A1.4)$$

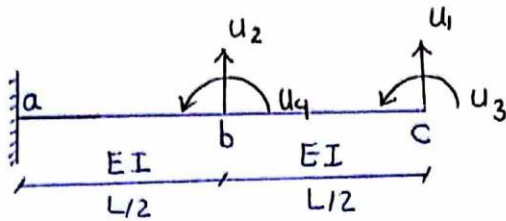
At each instant of time, the nodal forces M_a , M_b , V_a , and V_b are calculated from u_a , u_b , θ_a , and θ_b . The bending moment and shear at any other location along the element are determined by statics applied to the element of Fig. A1.1c.



ویژه کلاس های مجازی

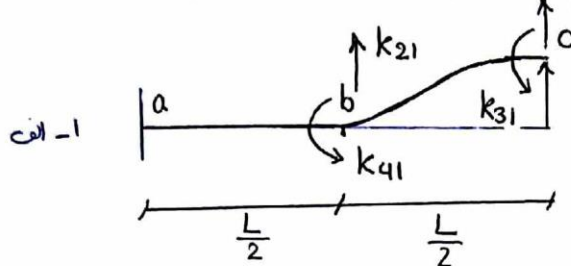
دینامیک سازه ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)



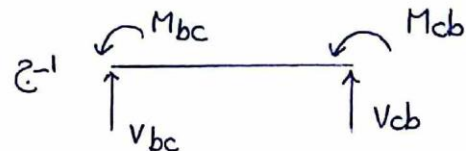
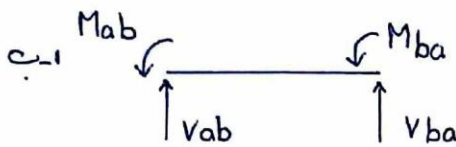
$$u_1 = 1; \quad u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

۱) اعمال تغییرمان واحد در وجه آزادی ۱



$$u_a = u_b = 0; \quad u_c = 1$$

$$\theta_a = \theta_b = 0; \quad \theta_c = 0$$



$$M_{ab} = \frac{4EI}{L/2} \theta_a + \frac{2EI}{L/2} \theta_b + \frac{6EI}{(L/2)^2} u_a - \frac{6EI}{(L/2)^2} u_b = 0$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L/2} \theta_a + \frac{4EI}{L/2} \theta_b + \frac{6EI}{(L/2)^2} u_a - \frac{6EI}{(L/2)^2} u_b = 0$$

$$V_{ab} = \frac{12EI}{(L/2)^3} u_a - \frac{12EI}{(L/2)^3} u_b + \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_a + \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_b = 0$$

$$V_{ba} = -\frac{12EI}{(L/2)^3} u_a + \frac{12EI}{(L/2)^3} u_b - \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_a - \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_b = 0$$

$$M_{bc} = \frac{4EI}{L/2} \theta_b + \frac{2EI}{L/2} \theta_c + \frac{6EI}{(L/2)^2} u_b - \frac{6EI}{(L/2)^2} u_c = -\frac{24EI}{L^2}$$

$$M_{cb} = \frac{2EI}{L/2} \theta_b + \frac{4EI}{L/2} \theta_c + \frac{6EI}{(L/2)^2} u_b - \frac{6EI}{(L/2)^2} u_c = -\frac{24EI}{L^2}$$

$$V_{bc} = \frac{12EI}{(L/2)^3} u_b - \frac{12EI}{(L/2)^3} u_c + \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_b + \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_c = -\frac{96EI}{L^3}$$

$$V_{cb} = -\frac{12EI}{(L/2)^3} u_b + \frac{12EI}{(L/2)^3} u_c - \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_b - \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_c = \frac{96EI}{L^3}$$



ویژه کلاس‌های مجازی

دینامیک سازه‌ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

آنگون با توجه به شکل (۱-الف)، (ب) و (۱-ج) داریم:

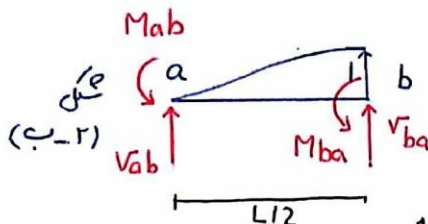
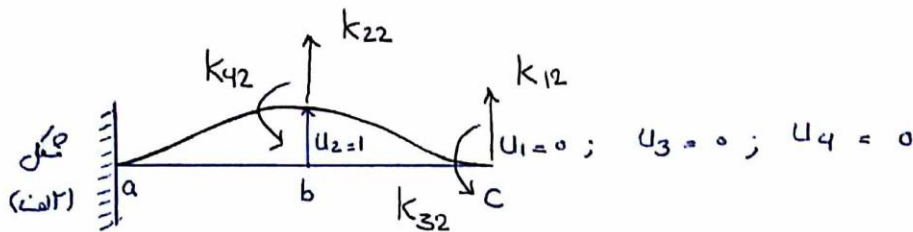
$$k_{11} = V_{cb} = \frac{96EI}{L^3}$$

$$k_{21} = V_{ba} + V_{bc} = 0 - \frac{96EI}{L^3} = -\frac{96EI}{L^3}$$

$$k_{31} = M_{cb} = -\frac{24EI}{L^2}$$

$$k_{41} = M_{ba} + M_{bc} = 0 - \frac{24EI}{L^2} = -\frac{24EI}{L^2}$$

۲) اعمال تغییر مکان واحد روی ریب آزادی



$$u_a = 0 ; u_b = 1$$

$$\theta_a = 0 ; \theta_b = 0$$

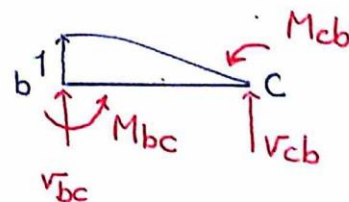
$$M_{ab} = -\frac{6EI}{(L/2)^2} u_b = -\frac{24EI}{L^2} ; M_{ba} = \frac{6EI}{(L/2)^2} u_b = \frac{24EI}{L^2}$$

$$V_{ab} = -\frac{12EI}{(L/2)^3} u_b = -\frac{96EI}{L^3} ; V_{ba} = \frac{12EI}{(L/2)^3} u_b = \frac{96EI}{L^3}$$

$$u_b = 1 ; u_c = 0$$

$$\theta_b = 0 ; \theta_c = 0$$

شکل (۲-ج)



$$M_{bc} = \frac{6EI}{(L/2)^2} u_c = \frac{24EI}{L^2}$$

$$M_{cb} = -\frac{6EI}{(L/2)^2} u_c = -\frac{24EI}{L^2}$$

$$V_{bc} = \frac{12EI}{(L/2)^3} u_c = \frac{96EI}{L^3}$$

$$V_{cb} = -\frac{12EI}{(L/2)^3} u_c = -\frac{96EI}{L^3}$$



ویژه کلاس های مجازی

دینامیک سازه ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

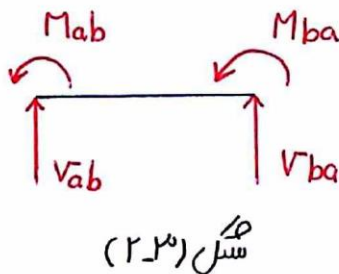
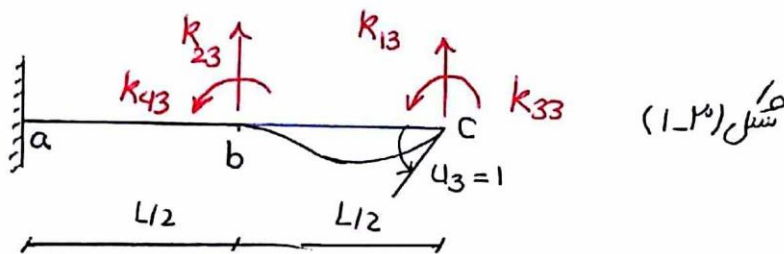
مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

آلئون با توجه به شکل های (۲-الف)، (۲-ب) و (۲-ج) داریم،

$$K_{12} = V_{cb} = -\frac{96EI}{L^3} \quad ; \quad K_{22} = V_{ba} + V_{bc} = \frac{96EI}{L^3} + \frac{96EI}{L^3} = \frac{192EI}{L^3}$$

$$K_{32} = M_{cb} = \frac{24EI}{L^2} \quad ; \quad K_{42} = M_{ba} + M_{bc} = -\frac{24EI}{L^2} + \frac{24EI}{L^2} = 0$$

(۳) اعمال تغییر مکان درجه های آزادی ۳



$$u_a = u_b = 0 \quad ; \quad \theta_a = \theta_b = 0$$

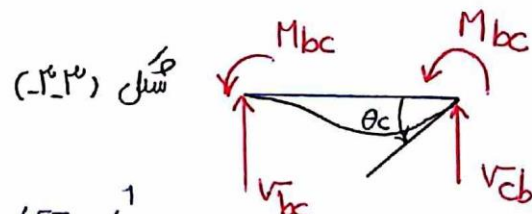
$$M_{ab} = M_{ba} = 0 \quad ; \quad V_{ab} = V_{ba} = 0$$

$$\theta_b = 0 \quad \theta_c = u_3 = 1$$

$$u_b = 0 \quad u_c = 0$$

$$M_{bc} = \frac{2EI}{(L/2)} \theta_c = \frac{4EI}{L} \quad ; \quad V_{bc} = \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_c = \frac{24EI}{L^2}$$

$$M_{cb} = \frac{4EI}{L/2} \theta_c = \frac{8EI}{L} \quad ; \quad V_{cb} = -\frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_c = -\frac{24EI}{L^2}$$



$$K_{13} = V_{cb} = -\frac{24EI}{L^2} \quad ; \quad K_{23} = V_{ba} + V_{bc} = 0 + \frac{24EI}{L^2} = \frac{24EI}{L^2}$$

$$K_{33} = M_{bc} = \frac{8EI}{L} \quad ; \quad K_{43} = M_{ba} + M_{bc} = 0 + \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{L}$$

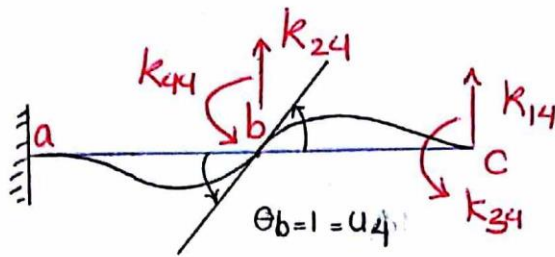


ویژه کلاس‌های مجازی

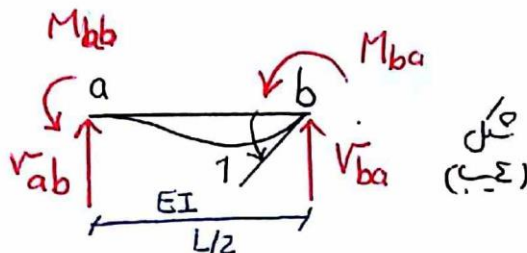
دینامیک سازه‌ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

۴. افعال تغییر مکان و ادرسی درجه آزادی ۲



شکل (۴-۱)ن



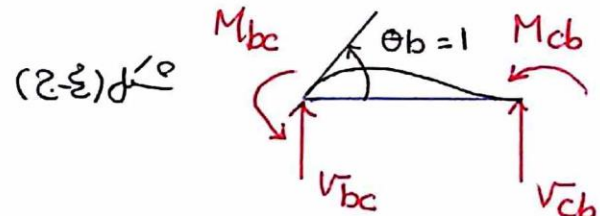
$$\begin{aligned} u_a &= 0 & \theta_a &= 0 \\ u_b &= 0 & \theta_b &= 1 \end{aligned}$$

شکل (۴-۲)

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L/2} \theta_b = \frac{4EI}{L}, \quad V_{ab} = \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_b = \frac{24EI}{L^2}$$

$$M_{ba} = \frac{4EI}{L/2} \theta_b = \frac{8EI}{L}, \quad V_{ba} = \frac{-6EI}{(L/2)^2} \theta_b = -\frac{24EI}{L^2}$$

$$\begin{aligned} \theta_b &= 1 & u_b &= 0 \\ \theta_c &= 0 & u_c &= 0 \end{aligned}$$



شکل (۴-۳)

$$M_{bc} = \frac{4EI}{L/2} \theta_b = \frac{8EI}{L}, \quad V_{bc} = \frac{6EI}{(L/2)^2} \theta_b = \frac{24EI}{L^2}$$

$$M_{cb} = \frac{2EI}{L/2} \theta_b = \frac{4EI}{L}, \quad V_{cb} = \frac{-6EI}{(L/2)^2} \theta_b = -\frac{24EI}{L^2}$$

اکنون مقادیر شکل های (۴-۱)ن، (۴-۲)ن، و (۴-۳)ن را جمع می دهیم:

$$K_{14} = V_{cb} = -\frac{24EI}{L^2}; \quad K_{24} = V_{ba} + V_{bc} = -\frac{24EI}{L^2} + \frac{24EI}{L^2} = 0$$

$$K_{34} = M_{cb} = \frac{4EI}{L}; \quad K_{44} = M_{ba} + M_{bc} = \frac{8EI}{L} + \frac{8EI}{L} = \frac{16EI}{L}$$



ویژه کلاس های مجازی

دینامیک سازه ها - فصل نهم: مباحث تکمیلی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 96EI/L^3 & -96EI/L^3 & -24EI/L^2 & -24EI/L^2 \\ -96EI/L^3 & 192EI/L^3 & 24EI/L^2 & 0 \\ -24EI/L^2 & 24EI/L^2 & 8EI/L & 4EI/L \\ -24EI/L^2 & 0 & 4EI/L & 16EI/L \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{4EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -24 & -6L & -6L \\ -24 & 48 & 6L & 0 \\ -6L & 6L & 2L^2 & L^2 \\ -6L & 0 & L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} mL/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mL/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$